5/11/2020

5° Μάθημα:

Παρατήρηση:
Για να υπάρχει ο αντίστροφος ενός τελεστή πρέπει:
α. $\forall\ |f\rangle \in S'$ να $\exists\ |k\rangle$ τέτοιο ώστε: $|k\rangle = A|f\rangle$
β. $A|f\rangle = A|g\rangle \Rightarrow |f\rangle = |g\rangle$ να ορίζεται η δράση του τελεστή

Για το προηγούμενο παράδειγμα αν $g(x) = x+1$ και $g(x) = \int f(t)dt$ δεν υπάρχει $f(x)$ που να ικανοποιεί τα παραπάνω γιατί $g(0)=0$

7. Για δύο τελεστές που δεν μετατίθενται $(AB \neq BA)$ ορίζουμε τον μεταθέτη των A, B: $[A,B] = AB - BA$

Ιδιότητες του μεταθέτη:
α. $[A,B] = -[B,A]$
προφανώς $[B,A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A,B]$
β. $AB = BA \Leftrightarrow [A,B] = 0$

Παράδειγμα:
Να βρεθεί ο μεταθέτης των τελεστών $A = d/dx$, $B = x$

Λύση:
Πρόχειρο: $A = \dfrac{d}{dx}$, $B = x$

$$[A,B] = AB - BA = \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \neq 1 - x\frac{d}{dx}$$

$$[A,B]f(x) = AB|f\rangle - BA|f\rangle$$

$$|f\rangle = \frac{d}{dx}(xf) - x\frac{d}{dx}f = f + xf' - xf' = f = |f\rangle$$

$$[A,B]|f\rangle = |f\rangle \Leftrightarrow [A,B] = I$$

Προσοχή: Ο μετάθεσης ως τελεστής ορίζεται από την δράση του.

Απόδ. $[A,B]|f\rangle = AB|f\rangle - BA|f\rangle = \frac{d}{dx}(xf(x)) - x\frac{d}{dx}f(x)$

$= xf' + f - xf' = f = |f\rangle$

Άρα $[A,B] = I$

Παράδειγμα:
Θεωρούμε S τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με N και την απεικόνιση
$x^n \to nx^{n-1} + ax^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n = 1,2,\dots,N$
Να βρεθεί ο τελεστής της απεικόνισης

Λύση:
Γνωρίζουμε ότι $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ και $ax^n = a \cdot x^n$

Άρα αν $A = \frac{d}{dx} + x$ τότε $Ax^n = \left(\frac{d}{dx} + a\right)x^n =$

$= \frac{d}{dx}x^n + ax^n = nx^{n-1} + ax^n$

Συνεπώς $A = \frac{d}{dx} + a$

Πρόχειρο: $A = \frac{n}{x} + a$, $Ax^n = nx^{n-1} + ax^n$

Γραμμικοί Τελεστές

Ορισμός: Ένας τελεστής σε ένα διανυσματικό χώρο S καλείται γραμμικός αν:
a. $A(a|f\rangle) = aA|f\rangle$, $a \in \mathbb{C}$
b. $A(|f\rangle + |g\rangle) = A|f\rangle + A|g\rangle$
Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να συνδιαστούν σε μια
$A(a|f\rangle + B|g\rangle) = A(a|f\rangle) + A(B|g\rangle) =$
$= aA|f\rangle + BA|g\rangle$, $a, B \in \mathbb{C}$

Παράδειγμα:
Να εξετάσετε αν ο $A=\frac{d}{dx}$ είναι γραμμικός τελεστής

Λύση:

$$A(a|f\rangle+b|g\rangle)=\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))=$$
$$=\frac{d}{dx}(af)+\frac{d}{dx}(bg)=a\frac{df}{dx}+b\frac{dg}{dx}$$
$$=aA|f\rangle+bA|g\rangle$$

συνεπώς η παράγωγος είναι γραμμικός τελεστής

Παράδειγμα: Ο τελεστής $A|f\rangle=Af=f^2(x)$

$$A(a|f\rangle+b|g\rangle)=A(af(x)+bg(x))=(af(x)+bg(x))^2=$$
$$=a^2f^2+b^2g^2+2ab+g\neq a^2f^2+b^2g^2$$

Συνεπώς ο τελεστής δεν είναι γραμμικός

Λέμε τότε ότι ο τελεστής είναι μη-γραμμικός

Οι γραμμικοί τελεστές έχουν τις παρακάτω (επιπλέον) ιδιότητες

1 Αν A και B είναι γραμμικοί τελεστές τότε και ο $C=A+B$ είναι γραμμικός τελεστής.

Αποδ:

$$C(a|f\rangle+b|g\rangle)=(A+B)(a|f\rangle+b|g\rangle)$$
$$=A(a|f\rangle+b|g\rangle)+B(a|f\rangle+b|g\rangle)$$
$$=aA|f\rangle+bA|g\rangle+aB|f\rangle+b\cdot B|g\rangle$$
$$=a(A|f\rangle+B|f\rangle)+b(A|g\rangle+B|g\rangle)$$
$$=a(A+B)|f\rangle+b(A+B)|g\rangle=aC|f\rangle+bC|g\rangle$$

2. Αν A είναι γραμμικός τελεστής τότε και ο aA είναι γραμμικός τελεστής, $a \in \mathbb{C}$.
Αποδ: άσκηση

3. Αν A και B είναι τελεστές τότε και ο AB είναι γραμμικός τελεστής.
Αποδ:
Θεωρώ $C = AB$ τότε έχουμε
$C(a|f\rangle + b|g\rangle) = AB(a|f\rangle + b|g\rangle) = A[B(a|f\rangle + b|g\rangle)]$
$= A(aB|f\rangle + bB|g\rangle) = a \cdot AB|f\rangle + BA|g\rangle =$
$= aC|f\rangle + bC|g\rangle$

4. Για γραμμικούς τελεστές ισχύει $A(B+C) = AB + AC$

$\xrightarrow{\text{άσκηση}}$
Ασκήσεις: 1 Για γραμμικούς τελεστές να δείξετε ότι $A(BC) = (AB)C$

2. Για γραμμικούς τελεστές να δείξετε ότι
$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$

Προσαρτημένοι Συντελεστές:
Ορισμός: Για έναν τελεστή A σε ένα διανυσματικό χώρο S ορίζεται ο τελεστής A^+ που καλείται προσαρτημένος του A τέτοιος ώστε
$\langle A^+g|f\rangle = \langle g|Af\rangle$

Πρόχειρο: $\langle A^+g|f\rangle = \langle g|Af\rangle$
$$\int_a^b A^+g^* f(x)dx = \int_a^b g^*(Af)dx$$

Παρατήρηση: Ως προς τον συμβολισμό τα
$|Af\rangle = A|f\rangle$ και $\langle A^+g| = A^+\langle g| = A^+|g\rangle^*$
Απδ. $|Af\rangle = A|f\rangle$

Γνωρίζουμε ότι $\langle A^+g|f\rangle = \langle f|Ag\rangle^* = \langle f|Ag\rangle^*$

Δηλ. $\langle g|A|f\rangle = \langle f|A^{+}|g\rangle^{*}$ και

$\langle f|A^{+}|g\rangle = \langle g|A|f\rangle^{*}$

Επίσης $(A^{+})^{+} = A$

πράγματι $\langle g|(A^{+})^{+}|f\rangle = \langle f|A^{+}|g\rangle^{*} = \langle g|A|f\rangle$

άρα $(A^{+})^{+} = A$

Ορισμός: Ένας τελεστής καλείται αυτοπροσαρτημένος (self adjoint) ή ερμιτιανός (Hermitian) αν $A^{+} = A$.

Προφανώς τότε $A^{+} = A \Leftrightarrow \langle Ag|f\rangle = \langle g|Af\rangle$

Ιδιότητες:

1. $(A+B)^{+} = A^{+} + B^{+}$

Αποδ:

$\langle g|(A+B)^{+}|f\rangle = \langle (A+B)f|g\rangle^{*} =$
$= \langle Af|g\rangle^{*} + \langle Bf|g\rangle^{*} =$
$= \langle g|A^{+}f\rangle + \langle g|B^{+}f\rangle = \langle g|(A^{+}+B^{+})f\rangle$

Δηλ. $(A+B)^{+} = A^{+} + B^{+}$

2. $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$

Αποδ. άσκηση

3. Ο A^{+} είναι γραμμικός τελεστής

Αποδ:

$\langle g|A^{+}(a|f_1\rangle + b|f_2\rangle) = (a^{*}\langle f_1| + b^{*}\langle f_2|)A|g\rangle$
$= \langle af_1|A|g\rangle^{*} + \langle bf_1|A|g\rangle^{*}$
$= \langle g|A^{+}|af_1\rangle + \langle g|A^{+}|bf_2\rangle$
$= a\langle g|A^{+}|f_1\rangle + b\langle g|A^{+}|f_2\rangle$

4. Ο A^{+} είναι μοναδικός

Αποδ:

Έστω A_1^{+} και A_2^{+} οι προσαρτημένοι του A

ορίζω $B = A_1^{+} - A_2^{+}$ και θ.δ.ο $B = 0$

$\langle g|B|f\rangle = \langle g|A_1^+ - A_2^+|f\rangle = \langle g|A_1^+|f\rangle - \langle g|A_2^+|f\rangle$
$= \langle f|A|g\rangle^* - \langle f|A|g\rangle^* = 0$
Δηλ. $B=0$ κ $A_1^+ = A_2^+$

Θεώρημα: Για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή L υπάρχει ο προσαρτημένος L^+
Φραγμένος καλείται ο τελεστής για τον οποίο υπάρχει σταθερά τέτοια ώστε
$\|Lf\|^2 = \langle Lf|Lf\rangle < c\langle f|f\rangle = c\|f\|^2$